图论知识总结

第一章 图的基本概念

§1 图论的产生与发展概述（略）

§2 图的基本定义

无向图的定义：设 V 是一个非空有限集合，$E\subseteq P_2(V)$，二元组(V,E)称为一个无向图。记为G=(V,E)

V 为顶点集,V 中元素称为无向图的顶点;

E 称为边集,E 中元素称为无向图的边.

若|V|=p，|E|=q，则称 G 为一个(p,q)图，即 G 是一个具有 p 个顶点 q 条边的图。

说明：

(1)对于(p,q)图 G，若 q=0，则 G 称为**零图**。零图是没有边的图，不研究，但它是一个无向图。而且每个点都是孤立点。(1,0)图称为**平凡图**。

(2)**若{u,v}∈E，则称{u,v}是图的一条边，也称 u 与 v 邻接。**

(3)常用小写字母(有时带下标)u,v,w,…表示图的顶点名，而用 x,y,z,…表示边名。若x={u,v}是图 G 的一条边，则 x 为这条边的名字，u 和 v 称为边 x 的端点；称 x 是连结顶点u 和 v 的边，且记为 x=uv 或 x=vu。

(4)x 与 y 是图 G 的两条边，若|x∩y|=1，则称边 x 与 y 邻接；若|x∩y|=0，边 x 与 y 独立。

图解（略）

无向图的说明：

(1) 由图的定义可知，无向图的图解中没有联结一个顶点与其自身的边——这种边称为环。允许有环存在的图称为带环图。

(2)**图的两个不同顶点间至多有一条边联结。**

若一个图中允许两个顶点间有多于一边存在，这样边称为多重边，这样的图称为多重图。

【哥尼斯堡七桥问题的图是一个多重图】

(3)允许有环和多重边存在的图，称之为伪图。

(4)很多书上把无向图定义为伪图，而把我们所定义的无向图称为**简单图(简单无向图)**。

顶点的度：设 v 为图 G=(V，E)的任一顶点，G 中与 v 邻接的边的条数称为顶点 v 的度(度数)，记为 degv。对(p,q)图的每个顶点 v，有 **0≤degv≤p-1。**

引入记号: $\delta(G)=\min\{\deg v\}$, $\Delta(G)=\max\{\deg v\}$

握手定理：设 G=(V,E)是一个具有 p 个顶点 q 条边的图，则 G 中各顶点度的和等于边的条数 q 的两倍，即 $\sum \deg v=2q$。(这个定理对多重图、伪图也成立)

推论：任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

特殊的图：

设 G 是图，若Δ(G)=δ(G)=r，即 G 的每个顶点的度都等于 r，则称 G 为 r-度正则图。

(1)若Δ(G)=δ(G)=3，则称 G 为 3-度正则图，也叫做三次图。

(2)若Δ(G)=δ(G)=0，则称 G 为零图,即 0-度正则图。

(3)若Δ(G)=δ(G)=p-1，则称为 p-1 度正则图，degv=p-1，每个顶点与其余各顶点均邻接。

(4)p-1 度正则图也称为 p 个顶点的**完全图**，记为 Kp。在 Kp 中，有 **p(p-1)/2** 条边。

推论：每个三次图均有偶数个顶点。

子图：设 G=(V,E)是一个图，则

(1)若 $V_1 \subseteq V$，$E_1 \subseteq E$，则图 $H=(V_1,E_1)$ 称为 G 的一个子图。
(2)若 $V_1=V$，$F \subseteq E$，则图 $H=(V,F)$ 称为 G 的生成子图。
(3)G_1 是图 G 的子图且 $G_1 \neq G$，则称 G_1 是 G 的真子图。
(4)设 G 的子图 H 具有某种性质，若 G 中不存在与 H 不同的具有此性质且包含 H 的真子图，则称 H 是具有此性质的极大子图。
(5) 设 $G=(V,E)$ 是图，非空子集 $S \subseteq V$，则 G 的以 S 为顶点集的极大子图称为由 S 导出的子图，记为 $\langle S \rangle$。
<u>同构</u>：设 $G=(V,E)$，$H=(U,F)$ 是两个无向图。若存在一个一一对应 $\varphi:V \to U$，使得 $\forall u,v \in V$, $uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in F$，并且 u,v 与 $\varphi(u),\varphi(v)$ 度数相同，则称 G 与 H 同构，记为 $G \cong H$。
说明：
(1)同构的两个图就可以看成是一个图了，可能这两个图的形状不一样；
(2)同构的两个图，顶点数 p 和边数 q 必定相同；但顶点、边相同的两个图未必同构。

§3 路、圈、连通图

<u>通道</u>：设 $G=(V,E)$ 是一个图。则
(1)图 G 的顶点和边的一个交错序列: $v_0, x_1, v_1, x_2, \cdots, v_{n-1}, x_n, v_n$ 称为图 G 的一条通道。其中 $x_i=v_{i-1}v_i$，$i=1,2,\cdots,n$。n 称为通道的长。这样的通道常称为 v_0-v_n 通道，并简记为 $v_0v_1v_2\cdots v_n$。在通道上，顶点和边均可重复出现。在计算通道的长时，重复的边按重复的次数计算。
(2)若 $v_0=v_n$ 时，称此通道为闭通道。
(3)包含 G 的所有顶点的通道称为 G 的一条生成通道。
(4)包含图 G 的所有顶点的闭通道称为 G 的一条生成闭通道。
<u>迹</u>：设 $G=(V,E)$ 是一个图。则
(1)若图 G 的一条通道上各边互不相同，称此通道为迹。 （在迹上，顶点可重复的）
(2)若图 G 的一条闭通道上各边互不相同，称此闭通道称为闭迹。
(3)包含图 G 所有顶点的迹称为 G 的一条生成迹。
(4)包含图 G 所有顶点的闭迹称为 G 的一条生成闭迹。
<u>路</u>：设 $G=(V,E)$ 是一个图。则
(1)若图 G 的一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为路。
(2)若图 G 的一条闭通道上各顶点互不相同,称此闭通道为圈。(闭路，回路)
(3)包含图 G 的所有顶点的路称为图 G 的生成路。
(4)包含图 G 的所有顶点的圈称为图 G 的生成圈。显然圈上至少有三个点，圈长度至少为 3。
<u>两个顶点间连通</u>：设 $G=(V,E)$ 是图，若 G 中两个不同顶点 u 和 v 间有路连接，则称顶点 u 和 v 是连通的。
规定:u 到 u 是连通的，即 u 到 u 有一条路，路长为 0。
<u>图的连通</u>：设 $G=(V,E)$ 是图，若 G 中任两个不同顶点之间至少有一条路连接，则称 G 是一个连通图。
规定: (1,0)图，即平凡图——也是连通图。
<u>连通分支</u>：图 G 的极大(不能再加入其它点)连通子图称为 G 的一个支。
注：连通图只有一个支，就是它本身。
定理：
定理 1 设 $G=(V,E)$ 是图，在 V 上定义二元关系 R 如下：$\forall u,v \in V$, $(u,v) \in R$ 当且仅当 u 与 v 之间有一条路，则 R 是 V 上的一个等价关系。

注：每个等价类所导出的子图就是 G 的一个支。

定理 2 设 G=(V,E)是一个有 p 个顶点的图。若对 G 的任两个不邻接的顶点 u 和 v 有：degu + degv≥p-1，则 G 是连通的。（反证法）

定理 3 设 G=(V,E)是至少有一个顶点不是弧立顶点的图。若∀v∈V，degv 为偶数，则 G 中必有圈。（最长路法）

定理 4 若图 G 中的两个不同顶点 u 与 v 间有两条不同的路联结，则 G 中必有圈。

§4 补图、偶图

补图：设 G=(V,E)是一个图，图 $G^c=(V,P_2(V)\backslash E)$称为 G 的补图。若 G 与其补图 G^c 同构，则称 G 是**自补图**。

说明：

1. 图 G 的补图就是其对应的完全图去掉 G 的全部边后剩下的生成子图。
2. 两个顶点 u 与 v 在 G 中邻接⇔u 与 v 在 G^c 中不邻接。
   两个顶点 u 与 v 在 G^C 中邻接⇔u 与 v 在 G 中不邻接。
3. **每个自补图都有 4n 或 4n+1 个顶点。**

定理：设图 G 是有 6 个顶点的图，则或者在 G 中存在一个三角形或在 G^c 中存在一个三角形。

偶图：设 G=(V,E)是一个图，则

(1)若 G 的顶点集 V 有一个二划分$\{V_1,V_2\}$，使得 G 的任一条边的两个端点一个在 V_1 中,另一个在 V_2 中,则这个图称为偶图。偶图有时记为$(\{V_1,V_2\},E)$。

注：没有边、圈的图都是偶图。

(2)设 $G=(\{V_1,V_2\},E)$是偶图，若$\forall u\in V_1,v\in V_2$，均有 uv∈E，则这个偶图称为完全偶图，并记为 Km,n 或 K(m,n)，其中$|V_1|=m$，$|V_2|=n$。

距离：设 G=(V,E)是一个图，u 和 v 是 G 的顶点。u 和 v 的**最短路**的长称为 u 与 v 之间的距离，并记为 d(u,v)。若 u 与 v 间在 G 中没有路，则定义 d(u,v)=∞。

偶图的特征性质：图 G 为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长。

图兰(Turan)定理：具有 P 个顶点的而没有三角形的图中最多有$[p^2/4]$条边。

§5 欧拉图(Euler)

欧拉图：设 G=(V,E)是一个图，则

(1)包含图 G 的所有顶点和边的迹称为欧拉开迹。
(2)包含图 G 的所有顶点和边的闭迹称为欧拉闭迹。
(3)存在一条欧拉开迹的图称为半欧拉图。
(4)存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

显然，半欧拉图、欧拉图一定是连通的。

定理 1 图 G 是欧拉图当且仅当图 G 是连通的且每个顶点的度都是偶数。

推论 1 设 G 是一个连通图，则下列命题等价：

(1)G 是一个欧拉图;
(2)G 的每个顶点的度都是偶数。
(3)G 的边集能划分为若干边互相不相交的圈。

推论 2 图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度数顶点。

定理 2 设 G 是连通图，G 恰有 2n 个奇度数顶点，n≥2。则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，而且至少有 n 条开迹。

§6 哈密顿图

哈密顿图：设 G 是一个图，则

(1)包含图 G 的所有顶点的路(生成路)称为哈密顿路。

(2)包含图 G 的所有顶点的圈(生成圈)称为哈密顿圈。

(3)具有哈密顿路的图称为半哈密顿图。

(4)具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

(5)确定一个图是否为哈密顿图的问题称哈密顿问题。

显然，有哈密顿路的图是连通图；每个哈密顿图是连通的，并且每个顶点的度≥2。

着色法判断不是哈密顿图

判断哈密顿图的必要条件：

设 G=(V,E)是哈密顿图，则对 V 的每个非空子集 S，均有：$\omega(G-S)\leqslant|S|$。

其中 G-S 是从 G 中去掉 S 中那些顶点后所得到的图，而 $\omega(G-S)$ 是图 G-S 的支数。

说明：$\omega(G-S)\leqslant|S|$ 的图不一定是哈密顿图；若 $\omega(G-S)\leqslant|S|$ 不成立，G 一定不是哈密顿图。

判断哈密顿图的充分条件：**（最长路法）**

设 G 是一个有 p 个顶点的图，p≥3。若 $\delta(G)\geqslant p/2$，则 G 是一个哈密顿图。

等价命题：“设 G 是一个 p 个顶点的非哈密顿图，p≥3，则 G 中至少有一个顶点的度 <p/2。”

推广：设 G 是有 p(p≥3)个顶点的图。若对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v，均有 **degu+degv≥p**，则 G 是一个哈密顿图。

等价命题：设 G 是有 p(p≥3)个顶点的非哈密顿图，则 G 中至少有两个不邻接的顶点 u 和 v，使得 degu+degv≤p-1。

判断半哈密顿图（哈密顿路）：设 G 是一个有 p 个顶点的图,若对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v,均有 **degu+degv≥p-1**，则 G 有哈密顿路。

§7 图的邻接矩阵

邻接矩阵：设 G=(V，E)是一个图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，则 p×p 矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为 G 的邻接矩阵，其中：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 若 v_iv_j\in E\\ 0 & 若 v_iv_j\notin E\end{cases}$$

性质：设 A,B 是图 G=(V,E)对 V 中元素的两种不同编号下的邻接矩阵，则存在一个置换矩阵 P 使得 $A=PBP^T$。也即适当的交换 B 的行及相应的列就得到了 A。

邻接矩阵包含了图 G 的全部信息：

(1)G 的顶点数 p 就是 G 的邻接矩阵 A 的阶。

(2)G 的边数 q 就是 A 中 1 的个数的一半。

(3)顶点 v_i 的度 $degv_i$ 等于 A 的第 i 行上 1 的个数。若 A 的第 i 行上的全部元素都为 0，则 v_i 为孤立点。

(5)A 是对称且对角线上全部元素为 0。

(6)若两个图的邻接矩阵相等或通过交换某些行和列后相同，则这两个图是同构的。

通道的条数：设 G=(V,E)是一个(p,q)图，A 是 G 的邻接矩阵，则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通

道的条数等于A^l的第 i 行第 j 列元素的值，其中 $i\neq j$。
说明：$i\neq j$ 是 v_i 与 v_j 之间长为 l 的通道的条数；$i=j$ 是 v_i 与 v_i 之间长为 l 的闭通道的条数

<u>关联矩阵</u>：设 G=(V,E)是一个(p,q)图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，$E=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$，则 $p\times q$ 矩阵 $H=(h_{ij})$称为 G 的关联矩阵，其中：

$$h_{ij}=\begin{cases}1, & 若v_i与边x_j邻接，\\ 0, & 否则。\end{cases}$$

<u>关联矩阵包含了图 G 的全部信息</u>:

(1) G 的顶点数 p 就是 H 的行数。
(2) G 的边数 q 就是 H 列数。
(3) G 的顶点 v_i 的度 $\deg v_i$ 等于的第 i 行上 1 的个数.
(4) 每条边都关联两个顶点，因此每列中有两个 1。

§8 带权图与最短路问题*

<u>带权图</u>:

设 G=(V,E)是一个图，f 是 V 到集合 S 的一个映射，则称三元组(V,E,f)是一个**顶点带权图**(带权图)，仍记为 G=(V,E,f)。

$\forall v\in V$，f(v)称为**顶点** v 的权。

若 g 是边集 E 到集合 T 的一个映射，则称三元组(V,E,g)为**边带权图**，也仍记为 G=(V,E,g)。

$\forall x\in E$，g(x)称为**边** x 的权。

第二章 树和割集

§1 树及其性质

<u>树</u>：连通且无圈的无向图称为(无向)树，记为 T。

<u>森林</u>：无圈的无向图称为(无向)森林。

说明:

(1)森林是不连通的，但森林的每个支都是连通的，因此森林的每个支都是树。**森林就是由若干棵树组成的图。**

(2)仅有一个顶点的树称为**平凡树**。其他的树称为非平凡树。

(3)度为 1 的顶点称为**树叶**，度大于 1 的顶点称为(分)支点。

(4)注意：在图论中没有空图，因此也无空树。

<u>树的特征性质：</u>

设 G=(V,E)是一个(p,q)图，则下列命题等价：

(1)G 是树（连通且无圈)；

(2)G 的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结；

(3)G 是连通的且 p=q+1；

(4)G 中无圈且 p=q+1；

(5)G 中无圈且 G 中任两个不邻接的顶点间加一条边，则得到有唯一圈的图；

(6)G 连通，并且若 p≥3，则 G 不是 Kp。又若 G 的任两个不邻接的顶点间加一条边，

则得到恰有唯一圈的图。

证明次序：（1）—（2）—（3）—（4）—（1）；（1）—（5）—（6）—（1）

推论 1 任一非平凡树中至少有两个度为 1 的顶点。（**最长路法**）

推论 2 任一非平凡树都是偶图。

推论 3 任一非平凡树都是 2-可着色的。

极小连通图：若连通图 G 中去掉任一条边后得到一个不连通图，则称 G 为极小连通图。

推论 1 图 G 是树⇔G 是极小连通图。

推论 2 设 G 是(p,q)连通图，则 $q \geqslant p-1$。

树的中心：设 G=(V,E)是连通图，v∈V，则数 $e(v)=\max\{d(v,u)\}$称为 v 在 G 中的偏心率。数 $r(G)=\min\{e(v)\}$称为 G 的半径。

满足 $r(G)=e(v)$的顶点 v 称为 **G 的中心点**。G 的所有中心点组成的集合称为 **G 的中心**，G 的中心记为 C(G)。

性质：**每棵树的中心或含有一个顶点，或含有两个邻接的顶点。**

§2 生成树

生成树(包含所有顶点的树)：设 G=(V,E)是一个图，若图 G 的一个生成子图 T=(V,F)是树，则称 T 是图 G 的生成树。

说明：

(1)这里并没有说明 G 是连通的，但是图 G 若有生成树 T，而 T 是连通的，所以 G 也是连通的。

(2)由于树是连通的，所以不连通图没有生成树。

(3) 连通图必有生成树吗？

生成森林：设 G=(V,E)是一个图，若 G 的一个生成子图 T=(V,F)是一个森林，则称 T 是图 G 的生成森林。任意一个图都有生成森林。

生成树存在问题

定理 1 图 G 有生成树⇔图 G 是连通图

定理 2 具有 p 个顶点的(有标号)完全图 Kp 有 p^{p-2} 个生成树($p \geqslant 2$)。

注意：

(1)定理 2 的结论中是 Kp 所有生成树的个数，而不是不同构的生成树的个数。

(2)对于非完全图 G，可以用矩阵-树定理来求出 G 的所有的生成树的个数。

树的弦：设 T 是连通图 G 的生成树，则 G 的不是 T 的边称为 T 的弦。T 的所有弦的集合称为生成树的补。

最小生成树问题：破圈法或避圈法

生成树的性质

定理 1 **图 G 的任一圈与 G 的任一生成树的补至少有一个公共边。**

定理 2 设 G=(V,E)是连通图，$T_1=(V,E_1)$和 $T_2=(V,E_2)$是 G 的两个不同的生成树。若 $e_1 \in E_1 \backslash E_2$，则$\exists e_2 \in E_2 \backslash E_1$，使得$(T_1-e_1)+e_2$【$(T_1+e_2)-e_1$】为 G 的生成树。

§3 割点、桥和割集

割点：设 v 是图 G 的一个顶点，若 G-v 的支数大于 G 的支数，则称顶点 v 为图 G 的一个割点

桥(割边)：设 x 是图 G 的一条边，若 G-x 的支数大于 G 的支数，则称边 x 为图 G 的一座桥。

说明：

(1)不连通图也有割点和桥的。

(2)有割点的图不是哈密顿图。

(3)若 uv 是 G 的桥且 degu≥2，则 u 是 G 的一个割点。

割点和桥的特征性质：

定理 1 设 v 是连通图 G=(V,E)的一个顶点，则下列命题等价：

(1)v 是图 G 的一个割点；

(2)存在与 v 不同的两上顶点 u 和 w，使得 v 在每一条连结 u 与 w 间的路上；

(3)集合 V\{v}有一个二划分{U,W},使得∀u∈U，w∈W，v 在每一条联结 u 和 w 的路上。

定理 2 每个非平凡连通图至少有两个顶点不是割点。**（最长路法）**

定理 3 设 x 是连通图 G=(V,E)的一条边,则下列命题等价

(1)x 是 G 的桥；

(2)x 不在 G 的任一圈上；

(3)存在 G 的两个不同顶点 u 和 v,使得 x 在每条联结 u 和 v 的路上；

(4)存在 V 的一个划分{U,W}，使得∀u∈U，w∈W，x 在每一条连接 u 与 w 的路上。

割集：设 G=(V,E)，S⊆E。若从 G 中去掉 S 中的所有边得到的图 G-S 的支数大于 G 的支数，而去掉 S 的任一真子集中的边得到的图的支数不大于 G 的支数，则称 S 为 G 的一个割集。

说明：割集不一定是去掉边最小的集合。

割集的性质：

（1）设 S 是连通图 G=(V,E)的割集,则 G-S 恰有两个支。

（2）设 G 是一个有 k 个支的图。若 S 是 G 的割集,则 G-S 恰有 k+1 个支。

（3）不连通图 G 的每个割集必是 G 的某个支的割集。

（4）设 T 是连通图 G=(V,E)的任一生成树，则 G 的每个割集 S 至少包含 T 的一条边。

（5）连通图 G 的每个圈 C 与 G 的任一割集 S 有偶数条公共边。

第三章 连通度和匹配

§1 顶点连通度和边连通度

顶点连通度（连通度)：设 G=(V,E)是连通图，S⊆V，如果 G-S 不连通，则称 S 分离图 G。要想从 G 中得到一个不连通图或平凡图，所需要从 G 中去掉的**最少顶点数**称为 G 的(顶点)连通度。记为 k(G)或 k。

推论：若 G 是连通的⇔k(G)≥1。

特殊图的顶点连通度： K_1-平凡图 $k(k_1)=0$；不连通的图 k(G)=0 ；**有割点的连通图 k(G)=1**；(T 是非平凡树 k(T)=1)；完全图 K_p，k(Kp)=p-1。

边连通度：设 G=(V,E)是一个无向图，要想从 G 中得到一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的**最少边数**称为 G 的边连通度。记为 λ(G)或 λ。

特殊的图边连通度： $\lambda(k_1)=0$；不连通的图 λ(G)=0；有桥的连通图 λ(G)=1； 非平凡树 T，λ(T)=1；当 p≥1 时， λ(Kp)=p-1。

连通度、边连通度、最小度之间关系：

（1）对任一图 G，有 k(G)≤λ(G)≤δ(G)。

（2）对任意非负整数 a,b,c，0≤a≤b≤c，存在一个图 G，使得 k(G)=a,λ(G)=b,δ(G)=c。

（3）设 G=(V,E)有 p 个顶点且 δ(G)≥[p/2]，则 λ(G)=δ(G)。（证明）

（4）设 G 是一个 (p,q) 图，则

a. 若 $q<p-1$，则 $k(G)=0$；

b. 若 $q\geqslant p-1$，则 $k(G)\leqslant[2q/p]$。（$\lambda(G)\leqslant[2q/p]$）

n-顶点连通、n-边连通：设 G 是一个图，则若 $k(G)\geqslant n$，则称 G 是 n-(顶点)连通的；若 $\lambda(G)\geqslant n$，则称 G 是 n-边连通的。**【去掉 n-1 个顶点(边)时，G 仍然连通】**

定理：设 $G=(V,E)$ 是 p 个顶点的图，$p\geqslant 3$，则 G 是 2-连通图⇔G 的任两个不同顶点在 G 的同一个圈上。

§2 匹配、霍尔(Hall)定理

匹配(相互独立、匹配、最大匹配)：设 $G=(V,E)$ 是一个图，则

(1)图 G 的任两条不邻接的边 x 与 y 称为是相互独立的。

(2)若 $Y\subseteq E$ 且 Y 中任两条边都是互相独立的，则称 Y 为 G 的一个匹配。

显然，若 Y 是图 G 的一个匹配，则 $\forall v\in V$，v 至多与 Y 中的一条边关联。

(3)设 Y 是图 G 的一个匹配，若对 G 的任一匹配 Y'，恒有 $|Y'|\leqslant|Y|$，则称 Y 是图 G 的最大匹配。

最大匹配、完美匹配（偶图）：设 $G=(\{V_1,V_2\},E)$ 是一个偶图，则

(1)若存在一个匹配 Y，使得 $|Y|=\min\{|V_1|,|V_2|\}$，则称 Y 是偶图 G 的最大匹配。

(2)若 $|V_1|=|V_2|$，则称 Y 为 G 的一个完美匹配。

说明:

(1)若偶图 G 有完全匹配，则 Y 必是 G 的最大匹配，但反过来不一定；

(2)若 G 有完美匹配，则 G 的顶点数必是偶数，并且 $\forall v\in G$，Y 中恰好有一条边与 v 关联。

霍尔定理（相异性条件）：设 $G=(\{V_1,V_2\},E)$ 是一个偶图，$|V_1|\leqslant|V_2|$。则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配⇔对于 V_1 中任意 k 个顶点 $(k=1,2,\cdots,|V_1|)$ 至少与 V_2 中的 k 个顶点相连接。

t 条件：设 $G=(\{V_1,V_2\},E)$ 是一个偶图，$|V_1|\leqslant|V_2|$。则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配的**充分条件**是存在正整数 t，使得 V_1 中每个顶点的度大于等于 t，V_2 中每个顶点的度小于等于 t。

注：从 t 条件可以推出相异性条件，但反过来不能推出 t 条件。

第四章 平面图和图的着色

§1 平面图及其欧拉公式

平面图：若 G 的图解已画在平面 S 上，而且 G 任何两条边均不相交(除可能在端点相交外)，则称图 G 为被嵌入平面 S 内。

已嵌入平面 S 内的图称为平面图。

若一个图可以嵌入平面，则称此图是可平面的。

典型的非平面图：K_5 和 $K_{3,3}$

外部面与内部面：平面图 G 把平面分成若干个区域，这些区域都是连通的称之为 G 的面。其中无界的那个连通区域称为 G 的外部面，其余的单连通区域称为 G 的内部面。

说明：

(1) 平面图的每个内部面都是 G 的某个圈围成的单连通区域；

(2) 一个平面图可以没有内部面（无圈），**但必有外部面，而且外部面唯一；**

平面图的欧拉公式：设 G 是 (p,q) 平面连通图，有 f 个面，则 $p-q+f=2$。（数学归纳法）

结论：

1. 设 G 是一个具有 k 个分支，f 个面的(p,q)平面图，则 p-q+f=k+1。
2. 设 G 是(p,q)图，则 G 是树⇔G 连通且 p=q+1。
3. 设 G 是(p,q)图，则 G 是树⇔G 无圈且 p=q+1。

欧拉公式的推论：这些推论是平面连通图的必要条件，不是充分条件。

推论 1 设 G 是(p,q)平面连通图且每个面都是由长为 n 的圈围成的，则 q=n(p-2)/(n-2)。(nf=2q,p-q+f=2)

推论 2 设 G 是(p,q)最大可平面图，则 G 的每个面都是 三角形，而且 q=3p-6。

推论 3 设 G 是(p,q)平面连通图，且 G 的每个面都是长为 4 的圈围成的，则 q=2p-4。

推论 4 若 G 是(p,q)平面(连通)图，p≥3，则 q≤3p－6。 若 G 是 2－连通的且没有三角形，则 q≤2p－4。

说明：(1)若 G 是平面连通图，则 G 一定满足：q≤3p－6 或 q≤2p－4。

(2)逆否命题成立：不满足这两个不等式的连通图一定不是平面图。

(3)逆命题不一定成立：满足这两个不等式的连通图不一定是平面图。

推论 5 平面(连通)图 G 中顶点度的最小值不超过 5。【设 G 是平面(连通)图，则 δ(G)≤5。】

§2 库拉托斯基定理、对偶图

细分图：设 G=(V,E)是一个图，则

(1)若 x=uv 是图 G 一条边，又 w 不是 G 的顶点，则当用 uw 和 wv 代替边 x 时，就称边 x 被细分。

(2)若 G 的某些条边被细分，产生的图称为 G 的细分图，也称为 2 度顶点内细分图。

同胚：若两个图可以从一个图通过一系列的边细分得到，这两个图称为同胚的，也称 2 度顶点内同胚。

库拉托斯基定理：一个图是可平面的充分必要条件是它没有同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

缩减图：设 G=(V,E)是一个图，则

(1)若 uw 和 wv 在 G 内且 degw=2，用一条边 uv 代替 uw 和 wv 时，则称 uw 和 wv 被缩减

(2)若 G 的某些条边被缩减，产生的图称为 G 的缩减图，也称 2 度顶点内缩减图。

瓦格纳定理：一个图是可平面的当且仅当它没有一个可以收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

初等收缩：一个图 G 的一个初等收缩由合并两个邻接的顶点 u 和 v 得到，即从 G 中去掉 u 和 v，然后再加上一个新的顶点 w，使得 w 邻接于所有邻接于 u 和 v 的顶点。

图 G 的所有子图都是平面图⇔图 G 是平面图；

图 G 中有一个子图是非平面图⇔图 G 是非平面图。

说明:对于 K_5 或 $K_{3,3}$ 这两个典型的非平面图有下列共性：

(1)都是正则图；

(2)都是非平面图；

(3)删去任一条边或一个顶点，都成为平面图；

(4)K_5 是**顶点数最少**的非平面图，$K_{3,3}$ 是**边数最少**的非平面图，两者都是最简单的非平面图。

对偶图：设 G=(V,E)是一个平面图，由 G 按如下方法构造一个图 G*，G*称为 G 的对偶图。

(1)对 G 的每个面 f 对应地有 G*的一个顶点 f*；

(2)对 G 的每条边 e 对应地有 G*的一条边 e*=f*g*；G*的两个顶点 f*与 g*由边 e*联结，当且仅当 G 中与顶点 f*与 g*对应的面 f 与 g 有公共边 e；

(3)若某条边 x 仅在一个面中出现而不是两个面的公共边，则在 G*中这个面对应的顶点有一个环。

说明：
(1) G*有一个环⇔G 有一座桥；G*有多重边⇔G 的两个面至少有两条公共边。
(2)若 G 是一个(p,q),f 个面的连通图，则 G 的对偶图 G*也是平面连通图；

$$p^*=f,\ q^*=q,\ f^*=p。$$

若 G 不是连通图，G 的对偶图 G*也是平面连通图。

$$p^*=f,\ q^*=q,\ f^*=p-k+1。$$

(3)一个图可以用图解来表示，把它的图解就看成是 这个图，但图解的画法不是唯一的；尽管两个图是同构的，但在几何形状上有很大的不同，因此产生的对偶图可能不同构。（P_{289} 图 9.3.4）
自对偶：若一个平面图与它的对偶图同构，则称这个平面图是自对偶的。

§3 图的顶点着色

图的着色、色数：
定义 1 图的(顶点)着色是指对图 G 的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个邻接的顶点有同一颜色。图 G 的一个 n-着色是用 n 种颜色对 G 的着色。
定义 2 若图 G=(V，E)的顶点已着色，则着同一颜色的那些顶点之集称为 G 的一个色组。
若 G 有一个 n-着色，则 G 的顶点集 V 被这种 n-着色划分为 n 个色组。
同一色组内的各顶点不邻接，这样的顶点之集称为 G 的一个顶点独立集；
定义 3 图 G 的色数是使 G 有一个 n-着色时 n 取的最小值，图 G 的色数记为 X(G)。
说明:
（1）若 X(G)=n，则称 G 是 n 色的。若 X(G)≤n，则称 G 是 n-可着色的。
（2）对一个(p,q)图 G，显然 G 有一个 p-可着色和一个 X(G)着色。因此，当 X(G)<n<p 时，G 一定有一个 n-着色。
特殊图的色数
（1）$X(K_p)=p$，$X(Kp^c)=1$，$X(K_{m,n})=2$。
（2）若 G 是偶数个顶点圈 C_{2n}，则 $X(C_{2n})=2$；
（3）若 G 是奇数个顶点的圈 C_{2n+1}，则 $X(C_{2n+1})=3$。
（4）对任意一棵非平凡树 T，X(T)=2。
（5）图 G 是 1-色的⇔G 没有边。

求色数的上限：
定理 1 一个图是可双色当且仅当它没有奇数长的圈。
定理 2 设 Δ=Δ(G)为图 G 的顶点度的最大值，则 G 是(Δ+1)-可着色的。（数学归纳法）
定理 3 若 G 是一个连通图且不是完全图也不是奇数长的圈，则 G 是 Δ(G)-可着色的。
定理 4 每个平面图是 6-着色的。（证明）
定理 5 每个可平面图是 5-可着色的。

第五章 有向图

§1 有向图的概念

有向图的定义：设 V 是非空有限集，A⊆V×V\{(v,v)|v∈V}，二元组 D=(V,A)称为一个有向图。V 是 D 的顶点的集合，V 中的元素称为 D 的顶点；A 是 D 的有向边(或弧)的集合,A 中元

素称为 D 的有向边；
说明：
(1)无环：图中没有从一个顶点到自身的弧称为环。
(2)无有向多重边：两个不同的顶点间若有弧，在此两顶点间指向同一顶点的弧也只有一条。
(3)有向图 $D=(V,A)$ 是在 V 上定义的一个反自反的二元关系 A 所组成的有穷关系系统。这个二元关系 A 未必是对称的，所以必须区别方向。
反向图：设 $D=(V,A)$ 是一个有向图，D 的反向图是有向图 $D^T=(V,A^T)$， $A^T=\{(v,u)\mid(u,v)\in A\}$。
度(入度、出度)：设 $D=(V,A)$ 是一个有向图，v 是 D 的任一顶点。 顶点 v 的入弧的条数称为顶点 v 的入度，记为 $id(v)$；顶点 v 的出弧的条数称为顶点 v 的出度，记为 $od(v)$。
性质：设 $D=(V,A)$ 是有向图且 $|A|=q$，则 $\sum id(v)=\sum od(v)=q$。
完全有向图：设 $D=(V,A)$ 是有向图，若 $A=V\times V\setminus\{(v,v)\mid v\in V\}$，则称 D 为完全有向图。在完全有向图中，任两不同顶点间有一对对称弧。
补图：设 $D=(V,A)$ 是一个有向图，D 的补图是有向图 $D^C=(V,A^C)$， $A^C=V\times V\setminus\{(v,v)\mid v\in V\}\setminus A$。
同构：设 $D_1=(V_1,A_1)$，$D_2=(V_2,A_2)$ 都是有向图，若存在一个一一对应 $\varphi:V_1\to V_2$，使得 $\forall u,v\in V_1$，$(u,v)\in A_1\Leftrightarrow(\varphi(u),\varphi(v))\in A_2$，则称 D_1 与 D_2 是同构的有向图。记为 $D_1\cong D_2$。

§2 有向路和有向圈

有向**通道**、有向**路**：设 $D=(V,A)$ 是一个有向图。则
(1)图 D 的顶点和弧的交错序列：$v_0,x_1,v_1,x_2,v_2,x_3,\cdots,v_{n-1},x_n,v_n$. 称为图 D 的一条有向通道。其中 $x_i=(v_{i-1},v_i)$， $i=1,2,\cdots,n$。
(2) v_0 称为该通道的起点，v_n 称为该通道的终点，这样的通道常称为 v_0-v_n 有向通道，并简记为 $v_0v_1v_2\cdots v_n$。
(3)n 称为有向通道的长。
(4)若 $v_0=v_n$ 时，则称此通道为有向闭通道(闭有向通道)在通道上，顶点和弧均可重复出现。在计算通道的长时，重复的弧按重复的次数计算。
(5)含 D 所有顶点的有向通道称为有向生成通道。
(6)含 D 所有顶点的有向闭通道称为有向生成闭通道。
有向**迹**：设 $D=(V,A)$ 是有向图，则
(1)若 D 的一条有向通道上的所有弧都不相同，则称此通道为 D 的一条有向迹；
(2)若 D 的一条有向闭通道上的所有弧都不相同，则称此闭通道为 D 的一条有向闭迹；
有向迹上出现的弧的条数称为有向迹的长；在有向迹上弧不能重复，顶点可重复。
(3)含有 D 所有顶点的有向迹称为 D 的有向生成迹。
(4)含有 D 所有顶点的有向闭迹称为 D 的有向生成闭迹。
有向**圈**：设 $D=(V,A)$ 是有向图，则
(1)若 D 的一条有向通道上的所有顶点都不相同，则称此通道为 D 的一条有向路；
(2)若 D 的一条至少含有两个不同顶点的有向闭通道上所有顶点都不相同，则称此闭通道为 D 的有向圈；
(3)有向路上弧的条数称为该有向路的长；在有向路上顶点不可重复。
(4)含有向图 D 所有顶点的有向路称为 D 的有向生成路；
(5)含有向图 D 所有顶点的有向圈称为 D 的有向生成圈，也称有向哈密顿圈；
(6)含有有向哈密顿圈的有向图称为哈密顿有向图。
有向图两个顶点的连接：设 $D=(V,A)$ 是有向图，u,v 是 D 的顶点，则
(1)若存在 D 的一条从 u 到 v 的有向路，则称顶点 u 可达到顶点 v，或 v 是从 u 可达的。

(2)特别，当 u=v 时，规定:从 u 可达到 u。
(3)u 与 v 互达⇔u 可达到 v 且 v 可达到 u。
说明：设 D=(V,A)是有向图，在 D 的顶点集 V 上定义了一个可达的二元关系 R:∀u,v∈A,(u,v)∈R⇔u 可达到 v。则可达关系 R 是 V 上的自反、传递的。但 R 未必对称。
<u>弱通道、弱路、弱圈</u>：设 D=(V,A)是一个有向图，则
(1)D 的顶点和弧的交错序列：$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, \cdots, v_{n-1}, x_n, v_n$，称为 D 的一条(有向)弱通道(半通道)。其中:$x_i=(v_{i-1}, v_i)$或 $x_i=(v_i, v_{i-1})$，i=1,2,…,n。
(2)若 $v_0=v_n$,则称它是(有向)闭弱通道(闭半通道)；
(3)若 D 的一条弱通道上各顶点互不相同，则称此弱通道为弱路或半路；
(4)若 D 的一条闭弱通道上各顶点互不相同，则称此闭弱通道为弱圈或半圈；
有向图连通：设 D=(V,A)是一个有向图，则
(1)若对 D 的任两不同的顶点 u 和 v，u 与 v 是互达的，则称 D 是**强连通**；
(2)若 D 的任两不同的顶点 u 和 v，或从 u 可达到 v，或从 v 可达到 u，则称 D 是**单向连通**；
(3)若对 D 的任两不同的顶点 u 和 v，u 与 v 之间有一条弱路连接，则称 D 是**弱连通**。
(4)若有向图是弱连通的，则称有向图 D 为连通的。
<u>性质</u>：
（1） 有向图 D 是强连通的⇔D 有一条有向生成闭通道
（2） 有向图 D 是单向连通的⇔D 有一条有向生成通道。
（3） 有向图 D 是弱连通的⇔D 有一条生成弱通道。
<u>强分支、单向分支、弱分支</u>：
（1）有向图 D 的极大强连通子图称为 D 的强支。
（2）有向图 D 的极大单向连通子图称为 D 的单向支。
（3）有向图 D 的极大弱连通子图称为 D 的弱支。
有向圈的几个性质：
（1）一个没有有向圈的有向图中至少有一个出度(入度)为零的顶点。(**最长路法**)
（2）有向图 D=(V,A)中没有有向圈当且仅当 D 中每一条有向通道都是有向路。
（3）有向图 D=(V,A)有有向圈<=>D 中有一个子图 $D_1=(V_1,A_1)$，使得∀v∈V_1，id(v)>0 且 od(v)>0。(**最长路法**)
（4）设 D=(V,A)是一个连通的有向图。若∀v∈V,od(v)=1，则 D 中恰有一个有向圈。(反证)

§3 有向图的矩阵表示

邻接矩阵、关联矩阵、可达矩阵（略）

§4 有向树与有序树

<u>有向树【连通的无圈的无向图称为无向树 T】</u>：弱连通的无弱圈的有向图称为有向树,记 T。
* 一个有向树是这样的有向图，当抹去弧的方向时，得到的无向图是一棵无向树。
在有向树中，顶点数 p 与弧的条数 q 之间满足关系式:q=p-1。
<u>有根树</u>：设 T 是一个有向树，若 T 中恰有一个顶点的入度为 0,而其余每个顶点的入度均为 1,则称 D 为有根树。
* 有根树中入度为 0 的顶点称为的根顶点，出度为 0 的顶点称为叶子，非叶子顶点称为分枝点或内顶点。
* 有根树的图解的画法，习惯上把根顶点画在上面。

* 规定：弧的方向朝下，所以箭头可以不画。

有根树的性质：有向图 T=(V,A)是一个有根树⇔T 中无弱圈且 T 有一个顶点 v_0可以达到其他任一顶点。

深度、高度、顶点的层次：设 T=(V,A)是一个以 v_0为根的有根树，v 是 T 的一个顶点，则

(1)从 v_0到 v 的有向路的长度称为 v 的深度；

(2)从顶点 v 到 T 的叶子的最长有向路的长度称为 v 在 T 中的高度；

(3)根顶点 v_0的高度称为树 T 的高度。

有序树：设 T=(V,A)是一个有根树,若 T 的各顶点的各儿子排定了次序，称 T 为一个有序树。

性质：设 T 是一个有序树，则

(1)若 T 的每个顶点的出度≤m，则称 T 为 m 元有序树。

(2)若 T 的每个顶点的出度不是 0 就是 m,则称 T 为正则 m 元有序树。

(3)若存在一个正整数 k,使得深度小于 k 的顶点的出度都是 m,而深度等于 k 的顶点都是叶子，则称 T 是满 m 元有序树。

§5 比赛图

定义：设 D=(V,A)是一个有向图，若 D 的任两个不同的顶点之间有且仅有一条有向弧，则称 D 为比赛图(定向完全图)。

性质：每个比赛图必有一条有向哈密顿路(即生成有向路)。[用数学归纳法证明]